

٣ المتتابعات المطردة

هناك بعض أنواع المتتابعات التي يسهل دراسة سلوكها، وأبسط هذه الأنواع هو المتتابعات المطردة:

١-٣- تعريف: لتكن $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتابعة من الأعداد الحقيقية

(١) نقول أن $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتابعة تزايدية إذا كان $x_n \leq x_{n+1}$ لكل $n \in \mathbb{N}$.

(٢) نقول أن $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتابعة تناقصية إذا كان $x_n \geq x_{n+1}$ لكل $n \in \mathbb{N}$.

(٣) تكون المتتابعة مطردة إذا كانت إما تزايدية أو تناقصية.

النظرية الأساسية للمتتابعات المطردة هي:

٢-٣- نظرية:

(١) أي متتابعة تزايدية ومحدودة من أعلى تكون تقاربية، وأي متتابعة تزايدية وغير محدودة من أعلى تؤزل إلى $+\infty$.

(٢) أي متتابعة تناقصية ومحدودة من أسفل تكون تقاربية، وأي متتابعة تناقصية وغير محدودة من أسفل تؤزل إلى $-\infty$.

برهان - سنبرهن (١) ونترك (٢) كتمرين للقارئ.

لتكن $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتابعة تزايدية ومحدودة من أعلى، وليكن ℓ أصغر حد علوي لـ $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. سنثبت أن $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \ell$.

ليكن $\varepsilon > 0$ معطى، إذن $\ell - \varepsilon$ ليس حداً علوياً للمتتابعة، وبالتالي يوجد $n_0 \in \mathbb{N}$ بحيث $x_{n_0} > \ell - \varepsilon$. لكن $n > n_0$ نستلزم أن $x_n \geq x_{n_0} > \ell - \varepsilon$ لأن المتتابعة تزايدية، كما نستلزم أن $x_n \leq \ell$ لأن ℓ حد علوي للمتتابعة، إذن

$$n > n_0 \implies \ell - \varepsilon < x_n \leq \ell \implies |x_n - \ell| \leq \varepsilon$$

وهو ما يبرهن المطلوب.

في حالة متتابعة $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تزايدية وغير محدودة من أعلى، ليكن $L \in \mathbb{R}$ معطى، حيث أن L ليس حداً علوياً للمتتابعة فإنه يوجد $n_0 \in \mathbb{N}$ بحيث $x_{n_0} > L$.

لأي $n > n_0$ يكون $x_n \geq x_{n_0} > L$ وهو ما يثبت أن $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$.

٣-٣- ملاحظة هامة: في البرهان السابق استخدمنا خاصية الاكتمال للأعداد الحقيقية. من المهم أن يعرف القارئ أن النظرية السابقة تكافئ خاصية الاكتمال، أي أننا إذا افترضنا صحة هذه النظرية يمكننا إثبات خاصية الاكتمال.

٤-٣- أمثلة:

(١) لندرس تقارب المتتابعة الشهيرة $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعطاة بـ $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ ، $n \geq 1$.

$$\begin{aligned}
x_n &= 1^n + C_1^n 1^{n-1} \left(\frac{1}{n}\right) + C_2^n 1^{n-2} \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{n}\right)^n \\
&= 1 + 1 + \frac{n-1}{2!} \frac{1}{n} + \frac{(n-1)(n-2)}{3!} \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{1}{n!} \frac{n!}{n^n} \\
&= 2 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)
\end{aligned}$$

من الواضح أن كل الحدود موجبة كما أن $(1 - \frac{k}{n})$ يتزايد مع n وبالتالي فإن $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ نزائدية.
كما أن التعبير الأخير يعطينا

$$x_n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} < 3$$

أي أن $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ محدودة من أعلى. وبالتالي فإن $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تقاربة.

(٢) لنفس المتتابعة السابقة $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ، سنجد أن

$$\begin{aligned}
\frac{x_n}{x_{n+1}} &= \left(\frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n+1}} \right)^{n+1} \frac{n}{n+1} \\
&= \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)} \right)^{n+1} \frac{n}{n+1} \\
&\geq \left(1 + \frac{n+1}{n(n+2)} \right) \frac{n}{n+1} \\
&= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{n+2}
\end{aligned}$$

من ذلك ينتج أن

$$\begin{aligned}
x_{n+1} - x_n &= x_{n+1} \left(1 - \frac{x_n}{x_{n+1}} \right) \\
&\leq x_{n+1} \left(1 - \frac{n}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \\
&\leq \frac{1}{(n+1)(n+2)} x_{n+1}
\end{aligned}$$

لنأخذ الآن $y_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1} = (1 + \frac{1}{n})x_n$ فنجد

$$\begin{aligned} y_{n+1} - y_n &= (1 + \frac{1}{n+1})x_{n+1} - (1 + \frac{1}{n})x_n \\ &= (1 + \frac{1}{n})(x_{n+1} - x_n) - \frac{1}{n(n+1)}x_{n+1} \\ &\leq (\frac{n+1}{n} \frac{1}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{n(n+1)})x_{n+1} \\ &= (\frac{1}{n(n+2)} - \frac{1}{n(n+1)})x_{n+1} < 0 \end{aligned}$$

ينتج إذن أن $y_{n+1} < y_n$ ، أي أن المتتابعة $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تناقصية ، ومن الواضح أن

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n}) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

(٣) لتكن $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ ، من الواضح أن هذه المتتابعة تزايدية.

سندرس ما إذا كانت محدودة أم لا: بالحساب المباشر نجد

$$\begin{aligned} x_1 &= 1, \\ x_2 &= 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \\ x_4 &= 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{4}{2}, \\ x_8 &= 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}) \\ &> 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \\ &\dots \\ x_{2^n} &= 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + \dots + (\frac{1}{2^{n-1}+1} + \frac{1}{2^{n-1}+2} + \dots + \frac{1}{2^n}) \\ &> 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2}}_{n \text{ مرة}} = \frac{n+2}{2} \end{aligned}$$

فلو أخذنا $L > 0$ نجد أنه لأي $n \geq 2L$ يكون $x_{2^n} > L$ وبالتالي فإن $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تزايدية وغير محدودة من أعلى ، فهي تباعدية.

في الأمثلة السابقة رأينا أن زوج المتتابعات

$$x_n = (1 + \frac{1}{n})^n, y_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$$

يتكون من متتابعة تزايدية ومتتابعة تناقصية تتقاربان لنفس النهاية، هذه الظاهرة مضيعة لإيجاد تقرّيبات من أعلى ومن أسفل لقيمة النهاية ، ويتكرر هذا في حالات كثيرة تستحق أن نضعها في نظرية:

٥-٣- نظرية: إذا كانت $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متابعتان من الأعداد الحقيقية تحفان

(أ) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تزايدية و $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تناقصية.

(ب) $x_n \leq y_n$ لكل $n \in \mathbb{N}$.

(ج) $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n - x_n = 0$.

فإن المتابعتان تتقاربان لنفس النهاية.

برهان - من الواضح أن $x_n \leq y_1$ و $y_n \geq x_1$ لكل $n \in \mathbb{N}$ وبالتالي فإن $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تزايدية ومحدودة من أعلى و $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تناقصية ومحدودة من أسفل. ينتج من ذلك تقارب كل من المتابعتين. وينتج من الشرط

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n - x_n = 0$$

أن لهما نفس النهاية.

٦.٣ أسئلة. اختر الإجابة الصحيحة فيما يلي

(١) لتكن $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتابعة من الأعداد الحقيقية بحيث $x_n \leq x_{n+2}$ لكل $n \in \mathbb{N}$ فإن

$$\begin{pmatrix} (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in \overline{\mathbb{R}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in \overline{\mathbb{R}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in \overline{\mathbb{R}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in \overline{\mathbb{R}} \end{pmatrix}$$

(٢) لتكن $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتابعة من الأعداد الحقيقية غير تناقصية ولا تزايدية، فإن

$$\begin{pmatrix} (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in \overline{\mathbb{R}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in \overline{\mathbb{R}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in \overline{\mathbb{R}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in \overline{\mathbb{R}} \end{pmatrix}$$

(٣) لتكن $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتابعتان من الأعداد الحقيقية بحيث:

$$x_n \leq y_n \leq x_{n+1} \quad \forall n$$

$$\begin{pmatrix} (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in \overline{\mathbb{R}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in \overline{\mathbb{R}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in \overline{\mathbb{R}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in \overline{\mathbb{R}} \end{pmatrix}$$

(٤) لتكن $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتابعتان من الأعداد الحقيقية بحيث: $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تزايدية و $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تناقصية و $x_n \leq y_n \quad \forall n$ فإن

$$\begin{pmatrix} (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in \overline{\mathbb{R}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in \overline{\mathbb{R}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in \overline{\mathbb{R}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in \overline{\mathbb{R}} \end{pmatrix}$$

٧.٣ تمارين

(١) إدرس تقارب كل من المتتابعت الآتية ، وأوجد النهاية إن أمكن.

$$x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{kn} \quad (أ)$$

$$x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \quad (ب)$$

$$x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \quad (ج)$$

$$x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2n+2k-1} \quad (د)$$

$$x_0 = 1, x_{n+1} = \frac{x_n}{2 + x_n} \quad (هـ) \quad x_0 = 1, x_{n+1} = \frac{1}{1 + x_n^2} \quad (و)$$

(٢) لتكن $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتابعة تحقق أن $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \ell > 1$ ، برهن أنه يوجد $n_0 \in \mathbb{N}$ بحيث $x_{n+1} > x_n$ لكل $n > n_0$. هل ينتج من ذلك تقارب $\S(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$

(٣) لتكن $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتابعة محدودة بحيث $x_{n+1} + x_{n-1} \geq 2x_n$ لكل $n \in \mathbb{N}$ ، ولتكن $y_n = x_{n+1} - x_n$. برهن أن $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تزايدية ومحدودة. ما هي قيمة نهاية $\S(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$

(٤) لتكن $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتابعة من الأعداد في الفترة $]0, 1[$ ، برهن أن $x_n(1 - x_n) \leq 1/4$.

ثم استخدم ذلك لإثبات أنه إذا كانت $x_{n+1}(1 - x_n) \geq 1/4$ لكل $n \in \mathbb{N}$ فإن $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1/2$.

(هـ) في كل من التمارين التالية برهن أن المتتابعات المعطاتان تتقاربان لنفس النهاية واستنتج قيمة النهاية إن أمكن.

$$y_n = x_n + \frac{1}{n}, x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \quad (ا)$$

$$y_n = x_n + \frac{1}{3n^2}, x_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2(k+1)^2} \quad (ب)$$

$$y_n = x_n + \frac{2}{n}, x_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \frac{1}{n} - \ln n \quad (ج)$$

$$y_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}, x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1} \quad (د)$$

$$y_n = (1 + \frac{1}{n})x_n, x_n = \prod_{k=1}^n (1 + \frac{1}{k^2}) \quad (هـ)$$

(٦) لتكن

$$x_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}, \quad y_n = x_n + \frac{1}{n!}$$

برهن أن $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تتقاربان لنفس النهاية وأن تلك النهاية عدد غير قياسي.

(٧) لتكن

$$x_n = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{(2k)!}, \quad y_n = x_n + \frac{1}{(4n+4)!}$$

برهن أن $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تتقاربان لنفس النهاية وأن تلك النهاية عدد غير قياسي.

٤ متتابعات كوشي ونقاط النهاية

١-٤- تعريف : شرط كوشي للتقارب Cauchy condition: لتكن $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتابعة من الأعداد الحقيقية ، نقول أن المتتابعة $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تحقق شرط كوشي لتقارب المتتابعات أو أنها متتابعة كوشية إذا كان:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n, m (n, m > n_0 \implies |x_n - x_m| < \varepsilon)$$

معنى شرط كوشي هو أن الحدود x_m و x_n تكون قريبة جدا من بعضها البعض عندما تكون n, m كبيرة بما فيه الكفاية.
ما هي الخواص الأساسية لمتتابعات كوشي؟ هل هي بالضرورة تقاربية؟ هل هي بالضرورة محدودة؟

٢-٤- نظرية: أي متتابعة كوشية تكون محدودة

برهان - نأخذ $\varepsilon = 1$. من شرط كوشي لابد أن يوجد $n_0 \in \mathbb{N}$ بحيث $|x_n - x_m| < 1$ لكل $n, m > n_0$ نضع

$$M = 1 + \max\{|x_0|, \dots, |x_{n_0}|, |x_{n_0+1}|\}$$

من السهل التحقق من أن $|x_n| \leq M$ لكل $n \in \mathbb{N}$.
النظرية الأساسية فيما يخص متتابعات كوشي هي:

٣-٤- نظرية: شرط التقارب لمتتابعات الأعداد الحقيقية يكافئ شرط كوشي. أي أن

(١) أي متتابعة تقاربية تكون كوشية.

(٢) أي متتابعة كوشية تكون تقاربية

برهان - لتكن $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتابعة من الأعداد الحقيقية.

(١) نفرض أن $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تتقارب للعدد $\ell \in \mathbb{R}$ ، وليكن $\varepsilon > 0$ معطى فلا بد أن يوجد $n_0 \in \mathbb{N}$ بحيث

$$n > n_0 \implies |x_n - \ell| < \varepsilon/2$$

ومن ذلك نجد

$$\begin{aligned} n, m > n_0 &\implies |x_n - \ell| < \varepsilon/2, |x_m - \ell| < \varepsilon/2 \\ &\implies |x_n - x_m| \leq |x_n - \ell| + |x_m - \ell| < \varepsilon \end{aligned}$$

أي أن المتتابعة تحقق شرط كوشي.

(٢) نفرض أن $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتابعة كوشية ، فهي بالتالي محدودة. ليكن $M > 0$ يحقق $|x_n| \leq M$ لكل $n \in \mathbb{N}$

لإيجاد نهاية المتابعة سنستخدم طريقة **التنصيف المتتالي** :

$$a_0 = -M, \quad b_0 = M, \quad L_0 = \{ n \in \mathbb{N} \mid x_n \leq (a_0 + b_0)/2 \}$$

إذا كانت L_0 لا نهائية (أي بها عدد لا نهائي من العناصر) فإننا نأخذ

$$a_1 = a_0, \quad b_1 = (a_0 + b_0)/2, \quad L_1 = \{ n \in \mathbb{N} \mid x_n \leq (a_1 + b_1)/2 \}$$

أما إذا كانت L_0 منتهية فإننا نأخذ

$$a_1 = (a_0 + b_0)/2, \quad b_1 = b_0, \quad L_1 = \{ n \in \mathbb{N} \mid x_n \leq (a_1 + b_1)/2 \},$$

نلاحظ أن في الحالتين: $b_1 \leq b_0$ و $a_1 \geq a_0$ و $b_1 - a_1 = (b_0 - a_0)/2$ كما أن الفترة $[a_1, b_1]$ تحوي عدداً لانهائياً من حدود المتابعة.

نستمر بنفس الطريقة فننصف الفترة المحصورة بين a_1, b_1 : فإذا كانت L_1 لا نهائية فإننا نأخذ

$$a_2 = a_1, \quad b_2 = (a_1 + b_1)/2, \quad L_2 = \{ n \in \mathbb{N} \mid x_n \leq (a_2 + b_2)/2 \},$$

أما إذا كانت L_1 منتهية فإننا نأخذ

$$a_2 = (a_1 + b_1)/2, \quad b_2 = b_1, \quad L_2 = \{ n \in \mathbb{N} \mid x_n \leq (a_2 + b_2)/2 \},$$

نحصل في هذه الحالة أيضاً على العلاقات:

$$b_2 \leq b_1, \quad a_2 \geq a_1, \quad b_2 - a_2 = (b_1 - a_1)/2 = (b_0 - a_0)/4$$

كما أن الفترة $[a_2, b_2]$ تحوي عدداً لانهائياً من حدود المتابعة.

لو نفذنا نفس الخطوات ل k مرة فإننا نحصل على $a_0, \dots, a_k$ و $b_0, \dots, b_k$ بحيث

$$b_k - a_k \leq (b_0 - a_0)/2^k, \quad b_k \leq b_{k-1} \leq \dots \leq b_1 \leq b_0, \quad a_k \geq a_{k-1} \geq \dots \geq a_1 \geq a_0$$

وبحيث تحوي الفترة $[a_k, b_k]$ عدداً لانهائياً من حدود المتابعة مما يمكننا من الاستمرار في خطواتنا.

بهذه الطريقة نحصل على زوج من المتابعات $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ يحقق:

$$(أ) \quad (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ نزائدية و } (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ تناقصية.}$$

$$(ب) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$$

من نظرية (٣.٥) نستنتج أن

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell \in \mathbb{R}$$

سنبرهن أن المتابعة $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تتقارب للعدد ℓ . لإثبات ذلك نأخذ $\varepsilon > 0$ ونختار n_1 بحيث

$$b_n - \ell < \varepsilon/4, \quad \ell - a_n < \varepsilon/4 \quad \forall n > n_1$$

ونختار أيضاً n_2 بحيث

$$n, m > n_2 \implies |x_n - x_m| < \varepsilon/2$$

بما أن الفترة $[a_{n_0+1}, b_{n_0+1}]$ تحوي عدد لا نهائي من حدود المتابعة $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ فإنها لابد أن تحوي حداً x_m بحيث $m > n_2$.

لأي $n > n_2$ يكون (بملاحظة أن $(b_{n_0+1} - a_{n_0+1}) < \varepsilon/2$)

$$|x_n - \ell| \leq |x_n - x_m| + |\ell - x_m| < \varepsilon/2 + (b_{n_0+1} - a_{n_0+1}) < \varepsilon$$

وهو ما يثبت المطلوب.

٤-٤ - ملاحظة هامة: في البرهان السابق استخدمنا (عن طريق نظرية (٣.٥)) خاصية الاكتمال للإعداد الحقيقية، من المهم أن يعرف القارئ أن النظرية السابقة هي أيضاً تكافئ خاصية الاكتمال، أي أننا إذا افترضنا صحة هذه النظرية يمكننا إثبات خاصية الاكتمال.

ننتقل الآن لدراسة مفهوم نقاط النهاية لمتابعة. من الواضح أن المتتابعة $(-1)^n$ غير تقاربية، لكن العددين 1 و -1 لهما علاقة خاصة بهذه المتتابعة، فالحدود الزوجية من المتتابعة تتقارب للعدد 1 بينما تتقارب الحدود الفردية للعدد -1. هل يمكننا صياغة هذه العلاقة بشكل عام؟

٥-٤ - تعريف: لتكن $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتابعة من الأعداد الحقيقية.

(١) نقول أن $(x_{n_k})_{(k \in \mathbb{N})}$ متتابعة جزئية من $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ إذا كانت $n_{k+1} > n_k$ لكل $k \in \mathbb{N}$.

(٢) نقول أن $a \in \mathbb{R}$ نقطة نهاية للمتتابعة $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ إذا كانت هناك متتابعة جزئية من $(x_{n_k})_{(k \in \mathbb{N})}$ نهايتها هي a .

لاحظ عزيزي القارئ أننا لم نشترط في هذا التعريف أن يكون a عدداً حقيقياً.

٦-٤ - نظرية: لتكن $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتابعة من الأعداد الحقيقية وليكن $a \in \mathbb{R}$ الشروط التالية متكافئة:

(١) a نقطة نهاية للمتتابعة $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

(٢) لكل $\varepsilon > 0$ ولكل $m \in \mathbb{N}$ يوجد $n \in \mathbb{N}$ بحيث $n > m$ و $|x_n - a| < \varepsilon$.

(٣) لكل $\varepsilon > 0$ الفترة $[a - \varepsilon, a + \varepsilon]$ تحوي عدداً لا نهائياً من حدود المتتابعة $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

برهان - لتكن $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتابعة من الأعداد الحقيقية.

(١) $\iff$ (٢): نفرض أن a نقطة نهاية للمتتابعة، إذن توجد متتابعة جزئية $(x_{n_k})_{(k \in \mathbb{N})}$ من $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ بحيث $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$ ليكن $\varepsilon > 0$ معطى، إذن يوجد $k_0 \in \mathbb{N}$ بحيث

$$k > k_0 \implies |x_{n_k} - a| < \varepsilon$$

لكن لأي $m \in \mathbb{N}$ يوجد $k > k_0$ بحيث $n_k > m$ وبالتالي يتحقق (٣).

(٢) $\Leftarrow$ (٣): نفرض (٢) ونفرض جدلاً عكس المطلوب، أي أنه يوجد $\varepsilon > 0$ بحيث لا تحوي الفترة $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$ إلا عدداً منتهياً من حدود المتابعة. نأخذ

$$m = \max\{j \in \mathbb{N} | x_j \in]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\}$$

إذن لأي $n > m$ يكون $|x_n - a| \geq \varepsilon$ وهو ما يناقض (٢).

(٣) $\Leftarrow$ (١): نفرض صحة (٣) ولأي k نختار n_k بحيث

$$n_k > n_{k-1} \quad (١)$$

$$x_{n_k} \in]a - \frac{1}{k+1}, a + \frac{1}{k+1}[\quad (٢)$$

هذا الاختيار ممكن بسبب الفرض بأن الفترة $]a - \frac{1}{k+1}, a + \frac{1}{k+1}[$ تحوي عدداً لانتهائي من حدود المتابعة $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. بهذه الطريقة نعرف متتابعة جزئية $(x_{n_k})_{(k \in \mathbb{N})}$ من $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ نحقق $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$ وهو ما يثبت (١).

٧-٤-٢ أمثلة:

(١) لتكن $x_n = (-1)^n$. المتابعة $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ لها نقطتي نهاية هما $-1, 1$ ، وذلك لأن المتابعة الجزئية $(x_{2k})_{(k \in \mathbb{N})}$ تتقارب إلى 1 والمتابعة الجزئية $(x_{2k+1})_{(k \in \mathbb{N})}$ تتقارب إلى -1 ولا يوجد عدد حقيقي آخر a بحيث $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$ تحوي عدداً لانتهائي من حدود المتابعة $\varepsilon = \min(|a - 1|, |a + 1|)$.

(٢) لتكن

$$x_n = \begin{cases} 1 & n \equiv 1(\text{mod}3) \\ 2 & n \equiv 2(\text{mod}3) \\ 0 & n \equiv 0(\text{mod}3) \end{cases}$$

من الواضح أن $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ لها ثلاث نقاط نهاية هي $0, 1, 2$.

(٣) على وجه العموم نقاط نهاية المتابعة

$$x_n = k, \quad n \equiv k(\text{mod}m)$$

هي $0, 1, \dots, m - 1$.

(٤) المتابعة $x_n = n$ لها نقطة نهاية واحدة هي $+\infty$.

(٥) المتابعة $(-1)^n n$ لها نقطتي نهاية هما $+\infty, -\infty$.

٨-٤-١ نظرية: لتكن $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتابعة من الأعداد الحقيقية. $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تكون تقاربية إذا وفقط إذا كانت محدودة ولها نقطة نهاية واحدة.

برهان - متروك للقارئ.

لأي متتابعة $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ يمكن أن ندرس مجموعة نقاط النهاية A لهذه المتتابعة كمجموعة من عناصر $\overline{\mathbb{R}}$ ، ومن المعتاد أن نضع

$$\limsup_n x_n = \sup A, \quad \liminf_n x_n = \inf A$$

من الممكن أن نبرهن أن $\limsup_n x_n$ و $\liminf_n x_n$ هما أيضاً نقطتا نهاية للمتتابعة. لننظر الآن لمتتابعة محدودة $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ من الأعداد الحقيقية ، هل يمكن ألا تكون لهذه المتتابعة أي نقطة نهاية؟ من الأكيد أن $+\infty, -\infty$ ليستا نقطتا نهاية للمتتابعة $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ، فهل هناك نقاط نهاية حقيقية للمتتابعة $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ؟ الإجابة على هذا السؤال تعطيها النظرية التالية:

٩-٤- نظرية بولزانو - فايرشتراس (Bolzano-Weierstrass): أي متباينة محدودة من الأعداد الحقيقية لها متباينة جزئية تقاربية.

برهان - لتكن $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متباينة محدودة من الأعداد الحقيقية. من طريقة التصفيف المتتالي التي استخدمناها في برهان نظرية (٣.٤) يمكننا إيجاد متابعتان $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ بحيث :

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ تزايدية و } (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ تناقصية.} \quad (ا)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0 \quad (ب)$$

$$(ج) \text{ لأي الفترة } [a_k, b_k] \text{ نحوي عدداً لانهاياً من حدود المتباينة } (x_n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

نبدأ الآن في اختيار حدود المتباينة الجزئية المطلوبة: نختار $n_0 = 1$ ، ثم نختار n_1 بحيث $x_{n_1} \in [a_1, b_1]$ و $n_1 > 1$. هذا الاختيار ممكن لأن الفترة $[a_1, b_1]$ نحوي عدد لا نهائي من حدود $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ وبالتالي فإن أحدها على الأقل يحقق $n_1 > 1$. نستمر بهذه الطريقة : فلأي k نختار n_k بحيث $x_{n_k} \in [a_k, b_k]$ و $n_k > n_{k-1}$. بذلك نوجد المتباينة الجزئية المطلوبة. إثبات أن هذه المتباينة تقاربية يتم بنفس الطريقة التي استخدمناها في برهان نظرية (٣.٤).

١٠.٤ أسئلة. اختر الإجابة الصحيحة فيما يلي

(١) المتباينة $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تحقق شرط كوشي إذا كانت

$$\left(\begin{array}{l} \text{غير محدودة} \\ \text{تؤول للصفر} \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{l} \text{محدودة} \\ \text{تقاربية} \end{array} \right)$$

(٢) لأي متباينة $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ يكون

$$\left(\begin{array}{l} (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ تقاربية} \iff (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ كوشية} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - x_{n+1}| = 0 \iff (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ كوشية} \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{l} (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ كوشية} \iff (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ كوشية} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - x_{n+1}| = 0 \iff (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ كوشية} \end{array} \right)$$

(٣) إذا كانت كل من $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تحقق شرط كوشي فإن

$$\left(\begin{array}{l} (x_n \cdot y_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ تحقق شرط كوشي} \\ (x_n \cdot y_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ تؤول للصفر} \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{l} (y_n/x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ تحقق شرط كوشي} \\ (x_n \cdot y_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ تزايدية} \end{array} \right)$$

١١.٤ تمارين.

(١) إدرس تقارب كل من المتتابعات التالية:

$$(ا) \quad x_n = \frac{e^n}{3^n}$$

$$(و) \quad x_1 = 1, x_{n+1} = x_n + \frac{n^2}{4^n}$$

$$(ب) \quad x_0 = 1, x_{n+1} = -3x_n$$

$$(ز) \quad x_n = n(e^{1/n} - 1)$$

$$(ج) \quad x_n = \sum_{k=0}^n \frac{6}{10^k}$$

$$(ح) \quad a > 0, x_n = n(a^{1/n} - 1)$$

$$(د) \quad p > 1, |\alpha_k| < p, x_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k p^k$$

$$(ط) \quad x_n = \ln\left(\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}\right)$$

$$(هـ) \quad p > 1, |\alpha_k| < k, x_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k p^k$$

$$(٢) \text{ لتكن } x_0 = 2 \quad x_n = 2 + \frac{1}{x_{n-1} + 2}$$

$$(ا) \text{ برهن أن } 2 \leq x_n < 3, \forall n.$$

$$(ب) \text{ لتكن } \eta_n = |x_{n+1} - x_n| \text{ برهن أن } \eta_n \leq \frac{1}{16} \eta_{n-1}.$$

$$(ج) \text{ استنتج أن } \eta_n < 1/4^{2n} \text{ ومن ذلك برهن أن المتتابة } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ كوشية.}$$

$$(د) \text{ أوجد } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

$$(٣) \text{ لتكن } x_0 = 1 \quad x_n = \frac{2x_{n-1} + 1}{x_{n-1} + 1}, n \geq 1$$

$$(ا) \text{ برهن أن } 1 \leq x_n < 2, \forall n.$$

$$(ب) \text{ لتكن } \eta_n = |x_{n+1} - x_n| \text{ برهن أن } \eta_n \leq \frac{1}{4} \eta_{n-1}.$$

$$(ج) \text{ استنتج أن } \eta_n < 1/4^n \text{ ومن ذلك برهن أن المتتابة } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ كوشية.}$$

$$(د) \text{ أوجد } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

(٤) متتابة فيبوناشي (Fibonacci sequence) هي متتابة الأعداد الصحيحة المعرفة بالعلاقة

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, \quad F_1 = F_2 = 1$$

$$(ا) \text{ أوجد أول عشرة حدود من متتابة فيبوناشي.}$$

$$(ب) \text{ ليكن } \chi \text{ عدد حقيقي يحقق المعادلة}$$

$$\chi^2 = \chi + 1$$

$$\text{ولتكن } s_n = A\chi^n \text{ حيث } A \text{ ثابت. برهن أن } (s_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ تحقق}$$

$$s_{n+1} = s_n + s_{n-1}$$

$$(ج) \text{ برهن أن } r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} \text{ موجودة وتحقق المعادلة}$$

$$r^2 = r + 1$$

٥ بعض التطبيقات على المتتابعات الكوشية

بعض التطبيقات على المتتابعات الكوشية

١-٥- تطبيق (١): لتكن $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتابة من الأعداد الحقيقية بحيث

$$|x_{n+1} - x_n| \leq c |x_n - x_{n-1}| \quad \forall n \geq n_0 \quad \text{حيث } c < 1$$

فإن المتتابة $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تقاربة. نبرهن ذلك كالتالي:

$$(ا) \text{ نثبت باستخدام الاستنتاج الرياضي أن } |x_{n_0+k+1} - x_{n_0+k}| \leq c^k |x_{n_0+1} - x_{n_0}| \text{ لكل } k \geq 1$$

(ب) من ذلك وباستخدام متباينة المثلث نحصل على:

$$\begin{aligned}
 |x_{n_0+m+k} - x_{n_0+k}| &\leq |x_{n_0+m+k} - x_{n_0+m+k-1}| + |x_{n_0+m+k-1} - x_{n_0+m+k-2}| \\
 &\quad + \cdots + |x_{n_0+k+1} - x_{n_0+k}| \\
 &\leq c^{m+k-1} |x_{n_0+1} - x_{n_0}| + c^{m+k-2} |x_{n_0+1} - x_{n_0}| + \cdots \\
 &\quad + c^k |x_{n_0+1} - x_{n_0}| \\
 &\leq \frac{c^k}{1-c} |x_{n_0+1} - x_{n_0}|
 \end{aligned}$$

(ج) ليكن $\varepsilon > 0$ ، بما أن $\lim_{k \rightarrow \infty} c^k = 0$ فإنه يوجد k_0 بحيث

$$k > k_0 \implies \frac{c^k}{1-c} |x_{n_0+1} - x_{n_0}| < \varepsilon$$

نختار $n_1 = n_0 + k_0$ فينتج أن

$$n, m > n_1 \implies |x_m - x_n| < \varepsilon$$

(د) بذلك نكون قد أثبتنا أن $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتابعة كوشية ، فهي بالتالي تقاربة.

لتكن ℓ هي نهاية المتتابعة $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. سنضع

$$\epsilon_n = |\ell - x_n|$$

نسمي هذا المقدار **الخطأ في تقريب** ℓ بالحد رقم n من المتتابعة. من الممكن إثبات أن:

$$\epsilon_n \leq \frac{c^{n-n_0}}{1-c} |x_{n_0+1} - x_{n_0}|$$

٢-٥ - تطبيق (٢): لتكن $f : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ دالة قابلة للاشتقاق ونحقق

$$|f'(x)| \leq c < 1 \quad \forall x \in]a, b[$$

نُعرّف المتتابعة $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ بالعلاقات الآتية:

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad x_0 = \alpha$$

حيث $\alpha \in]a, b[$ نسمى القيمة الابتدائية.

من نظرية القيمة المتوسطة للتفاضل (نظرية لاجرانج) نجد أن:

$$|x_{n+1} - x_n| = |f(x_n) - f(x_{n-1})| = |f'(y)| |x_n - x_{n-1}|$$

حيث y بين x_n, x_{n-1} .

وبالتالي ينتج من التطبيق السابق أن $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تقاربة.

٣-٥- مثال: لتكن $f(x) = \frac{1}{1+x}$, $x \in [\frac{1}{4}, 1]$ سنجد أن

$$|f'(x)| \leq \frac{16}{25}$$

وبالتالي فإن المتتابعة

$$x_0 = \frac{1}{3}, \quad x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n}$$

تقارب.

٤-٥- تطبيق (٣): طريقة نيوتن-رافسون Newton-Raphson method: لتكن $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ دالة قابلة للاشتقاق. سنبحث عن حل للمعادلة

$$f(x) = 0$$

نبدأ بأخذ أي قيمة ابتدائية $x_0 \in [a, b]$. إذا كانت $f(x_0) = 0$ فإننا قد حصلنا على الحل (بالمصادفة!). لذا لنفرض أن $f(x_0) \neq 0$. سنفرض أيضاً أن $f'(x_0) \neq 0$. إذا كان حل المعادلة هو $\alpha \in [a, b]$ وكان قريباً جداً من x_0 فإننا يمكن أن نستخدم التقريب الخطي:

$$f(\alpha) - f(x_0) \approx f'(x_0)(\alpha - x_0)$$

ف نجد أن

$$\alpha \approx x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

لكننا وقد اخترنا x_0 بالصدفة فإن

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

لن يكون بالضرورة مساوياً ل α , لكن ربما يكون أقرب للحل (لماذا؟ إدرس إشارة $f(x_0)$, $f''(x_0)$ وعلاقتها بالاقتراب من الحل).
نستمر بهذه الطريقة فنضع

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

هل نتقارب هذه المتتابعة؟ للأسف لا نضمن ذلك دائماً , فمثلاً لو أخذنا الدالة

$$f(x) = x^3 - 2x + 2$$

واختارنا $x_0 = 0$ فإن المتتابعة $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ لن تكون تقاربة.
باستخدام التطبيق السابق يمكن إثبات النظرية التالية:

نظرية: إذا كانت $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ دالة قابلة للاشتقاق مرتين ومشتقتها من الرتبة الثانية متصلة وتحقق

$$|f(x)f''(x)| \leq c(f'(x))^2, \quad \forall x \in [a, b] \quad \text{حيث } c > 1$$

وإذا كانت المعادلة $f(x) = 0$ لها حلول في $[a, b]$ فإن المتتالية $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بـ

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad x_0 \in [a, b]$$

تتقارب لأحد هذه الحلول.

٥-٥ - أمثلة:

(١) لنكن $f(x) = x^2 - 2$ ولنكن $a = 1.2, b = 1.6$. بالحساب نحصل على

$$f'(x) = 2x, \quad f''(x) = 2, \quad |f(x)f''(x)| = 2|x^2 - 2|$$

$$x \in [1.2, 1.6] \implies |x^2 - 2| \leq 0.6 \leq \frac{1}{2}x^2$$

أي أن شروط النظرية تتحقق بأخذ $c = \frac{1}{4}$.

نوجد التقريبات لحل المعادلة: نبدأ بقيمة $x_0 = 1.3$ فنجد $f(x_0) = 0.31$ و $f'(x_0) = 2.6$ وبالتالي $x_1 \approx 1.42$.

ثم نكرر الحساب: $f(x_1) = 0.0164$ و $f'(x_1) = 2.82$ فنكون $x_2 = 1.414225$ من الواضح أن $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تتقارب إلى $\sqrt{2}$ بسرعة .

(٢) نأخذ $f(x) = x^3 - 1$ و $a = \frac{1}{2}, b = \frac{3}{2}$ فنجد أن شروط النظرية لا تتحقق.